OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER, 1899. Nr. 6.

Application de la théorie des quaternions de Caspar Wessel, à la démonstration d'un théorème récent.

Par

H. Valentiner.

(Présenté à la séance du 19 mai 1899.)

Dans le traité de Caspar Wessel «Sur la représentation analytique de la direction», publié originairement en 1797 (nouv. éd. 1897), est exposée une théorie des quaternions, qui s'applique merveilleusement bien à la résolution des triangles sphériques. C'est pourquoi j'ai essayé d'employer aussi cette théorie dans le cas de variations infinitésimales d'un tel triangle.

Dans son mémoire «Nouveau principe pour études de géométrie des droites», publié dans le Bulletin de l'Académie des Sciences de Danemark, 1898, pp. 283—344, M. Johannes Petersen, a démontré le théorème suivant:

Quand un triangle sphérique variable, tracé sur une sphère donnée, y subit un déplacement arbitraire infiniment petit, la somme géométrique des fluxions des angles et des côtés sera nulle.

Les fluxions (variations) des angles et des côtés sont exprimées par des segments finis, détachés des arêtes des angles solides correspondants au triangle et au triangle polaire. De plus, M. Petersen entend par «angle», comme le fait Wessel et comme nous le ferons dans ce qui suit, ce qu'à l'ordinaire nous dénommons angle adjacent.

Ce théorème contient toutes les relations qui existent entre les variations des angles et des côtés d'un triangle sphérique.

Si l'on suppose connues les formules de la trigonométrie sphérique, le théorème peut être démontré par différentiation de la formule

$$\cos a = \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos A,$$

a, b, c, A, B, C étant les côtés et les angles d'un triangle sphérique. De cette formule on tire

$$\begin{aligned} -\sin a\, da = & -(\sin b \cos c + \cos b \sin c \cos A)\, db \\ & -(\cos b \sin c + \sin b \cos c \cos A)\, da \\ & + \sin b \sin c \sin A\, dA\,. \end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned} -(\sin b \cos c + \cos b \sin c \cos A) &= \sin a \cos C \\ -(\sin c \cos b + \sin b \cos c \cos A) &= \sin a \cos B, \end{aligned}$$

et enfin

$$\frac{\sin b \sin c \sin A}{\sin a} = \sin h_a,$$

où h_a est la perpendiculaire sphérique abaissée de A sur le côté opposé. On aura donc

$$da + db \cos C + dc \cos B + dA \sin h_a = 0,$$

ce qui met en évidence, que la somme des projections des fluxions des angles et des côtés sur une arête quelconque de l'angle solide correspondant au triangle polaire est nulle, par où le théorème est démontré.

Or la théorie de Wessel fait ressortir le théorème sous une forme nouvelle, sans recourir aux formules sphériques. Wessel a démontré en effet la formule suivante:

$$s \,''\, A \,''\, c \,''\, B \,''\, a \,''\, C \,''\, b = s,$$

$a, b, c,\ A, B, C$ ayant les mêmes significations que ci-dessus. Le signe $''$ indique, quand il est suivi d'une majuscule, une rotation autour d'un axe donné ε passant par le centre de la sphère, et, quand il est suivi d'une minuscule, une rotation autour d'un autre axe η, qui fait un angle droit avec le premier. La formule exprime donc qu'une ligne arbitraire s, en relation fixe avec la sphère, restera invariable, si l'on fait tourner la sphère, d'abord d'un angle A autour de η, puis d'un angle c autour de ε et ainsi de suite, toujours dans le sens positif, alternativement autour de η et ε. C'est cette formule qui contient la résolution complète des triangles sphériques.

Nous chercherons à développer la formule qui en résultera, quand les angles et les côtés subiront des variations infinitésimales. On aura dans ce cas

$$s''(A+dA)''(c+dc)''(B+dB)''(a+da)''(C+dC)''(b+db) = s.$$

Mais la variation d'une variation infinitésimale, produite par une rotation elle-même infinitésimale, étant un infiniment petit d'ordre supérieur au premier, on peut remplacer cette équation par une autre, qui exprime que la somme des influences des variations dA, dc, ..., sur la position de s est nulle. Cette équation aura la forme

$$\begin{aligned}&(s''(A+dA)''c''B''a''C''b-s)\\ &+(s''A''(c+dc)''B''a''C''b-s)\\ &+(s''A''c''(B+dB)''a''C''b-s)\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots = 0,\end{aligned}$$

les additions et les soustractions étant partout géométriques.

Si nous faisons la supposition que s est un rayon de la sphère, chaque différence de cette équation exprimera une ligne infiniment petite tracée sur la surface de la sphère. Mais cette relation peut s'écrire sous une forme plus simple. Si $''A^{-1}$, $''b^{-1}$ ... désigne l'opération inverse de $''A$, $''b$ ... on peut ajouter à chaque terme, sans changer sa valeur, l'opération

$$\text{״} b^{-1} \text{״} C^{-1} \text{״} a^{-1} \text{״} B^{-1} \text{״} c^{-1} \text{״} A^{-1}$$

ou une opération analogue, par où l'on obtiendra

$$\begin{aligned}&(s \text{״} dA - s) + (s \text{״} A \text{״} dc \text{״} A^{-1} - s) + (s \text{״} A \text{״} c \text{״} dB \text{״} c^{-1} A^{-1} - s)\\ &+ (s \text{״} b^{-1} \text{״} C^{-1} \text{״} da \text{״} C \text{״} b - s) + (s \text{״} b^{-1} \text{״} dC \text{״} b - s)\\ &+ (s \text{״} db - s) = 0.\end{aligned}$$

Or l'expression $s \text{״} L \text{״} q \text{״} L^{-1}$ indique un déplacement de s par l'opération q, les axes ε et η étant déplacés par l'opération L^{-1}. En conséquence, si le point A du triangle sphérique est placé à l'extrémité de l'axe η et si le côté AC fait une angle de $+90°$ avec le plan $\varepsilon\eta$, on reconnaît que le premier, le troisième et le cinquième terme représentent des arcs décrits par l'extrémité du rayon s, en des rotations de grandeurs respectives dA, dB, dC autour des sommets A, B, C du triangle. De même le second, le quatrième et le sixième terme représentent des arcs décrits par l'extrémité de s, en des rotations de grandeurs respectives dc, da, db autour des sommets du triangle polaire cab. La somme géométrique de ces déplacements étant nulle, on peut énoncer le théorème suivant:

Soit ABC un triangle sphérique, abc le triangle polaire. Faisons varier infiniment peu les angles et les côtés de ABC (ou les angles de abc); si l'on fait subir à la sphère sur laquelle est situé ABC des rotations autour des sommets A, B, C et a, b, c, égales aux variations correspondantes, la sphère restera immobile.

Mais ce théorème n'est au fond qu'une autre forme du théorème de M. Johannes Petersen. Car, si l'on fait tourner un point P de la sphère d'un angle dA autour du point A, le déplacement de P sera perpendiculaire au rayon R_A qui passe par A, et sa grandeur sera $\sin(AP)dA$, AP étant l'angle que font les rayons qui passent par A et P, et R étant égal à l'unité. Par conséquent, le déplacement considéré de P sera égal en grandeur à la projection de la fluxion de A, représenté par un segment du rayon R_A, sur le plan tangent de la sphère en P et sera perpendiculaire à cette projection. Donc, si l'on fait tourner cette projection de 90°, elle sera parallèle au déplacement. Cela fait ressortir que la somme géométrique des projections des fluxions de A, B, C, a, b, c, sur un plan arbitraire est nulle, théorème qui est identique à celui de M. Johannes Petersen.

Après avoir fini ma note, j'ai reçu de M. Joh. Petersen une communication où la démonstration du théorème final est considérablement simplifiée *et où le théorème lui-même est étendu à des rotations finies.*

Avec la permission de l'auteur je vais traduire cette communication.

«Deux triangles sphèriques ABC et $A_1B_1C_1$ situés sur la même sphère, peuvent être placés de manière que les points A et A_1 coïncident et que l'arc AC soit porté sur A_1C_1, tandis que B et B_1 tombent du même côté de A_1C_1. Qu'on fasse les opérations suivantes: 1° glisser ABC sur A_1C_1 jusqu'à faire coïncider C et C_1, 2° tourner ABC autour de C jusqu'à ce que CB tombe sur C_1B_1, 3° glisser sur C_1B_1 jusqu'à faire coïncider B et B_1, 4° faire une rotation autour de B_1 jusqu'à faire tomber BA sur B_1A_1, 5° glisser sur B_1A_1 jusqu'à faire coïncider A et A_1, 6° finalement faire une rotation autour de A_1 jusqu'à faire tomber AC sur A_1C_1; le triangle ABC sera ramené dans sa position primitive.

Les six rotations s'anéantiront donc.

Le théorème des six rotations finies et successives démontré de cette manière comprend comme cas special le théorème des rotations infinitésimales.

Le 19 novembre 1899.»
